SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

GEOMETRÍA

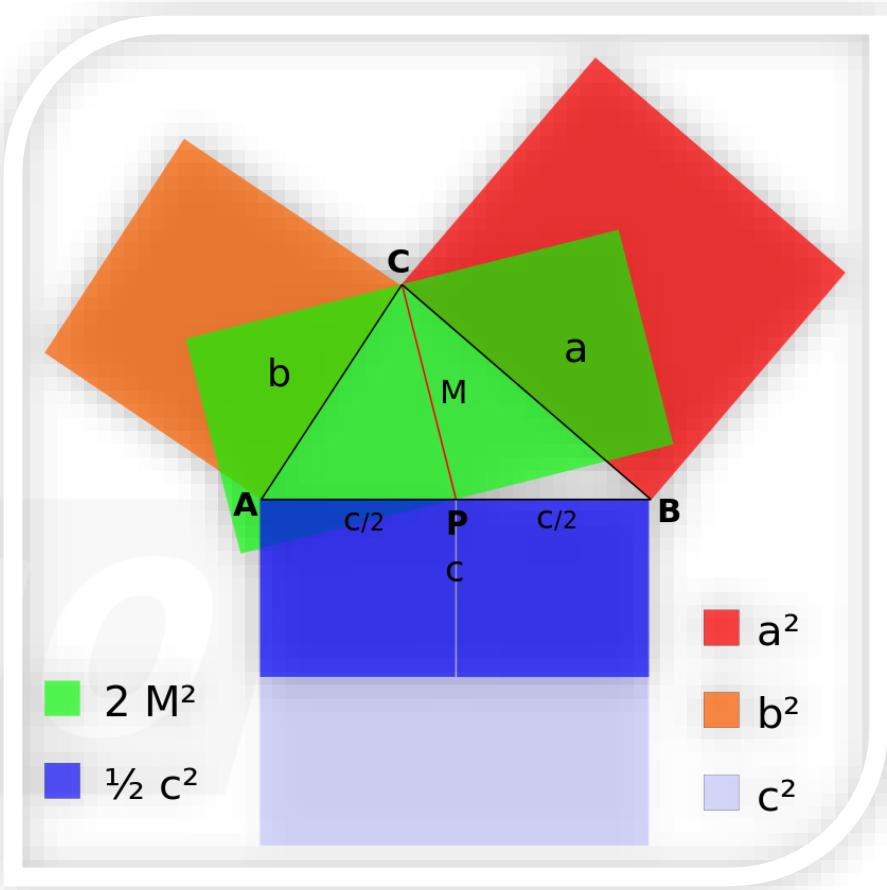
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

PLANA DE GEOMETRÍA

RELACIONES MÉTRICAS II

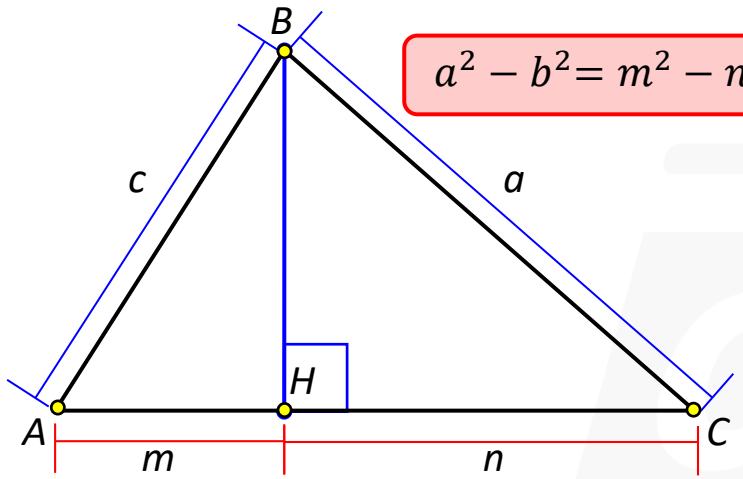
OBJETIVOS

1. CONOCER LAS RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.
2. CALCULAR LAS LONGITUDES DE LAS LÍNEAS NOTABLES (MEDIANA, BISECTRIZ, ALTURA...)
3. APLICAR LOS TEOREMAS EN LOS PROBLEMAS TIPO EXAMEN DE ADMISIÓN UNI.



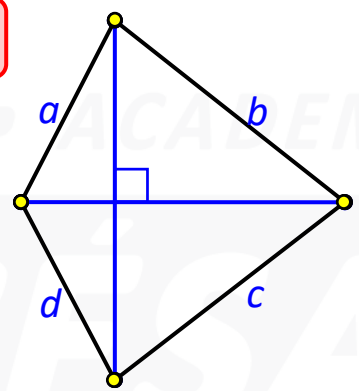
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES



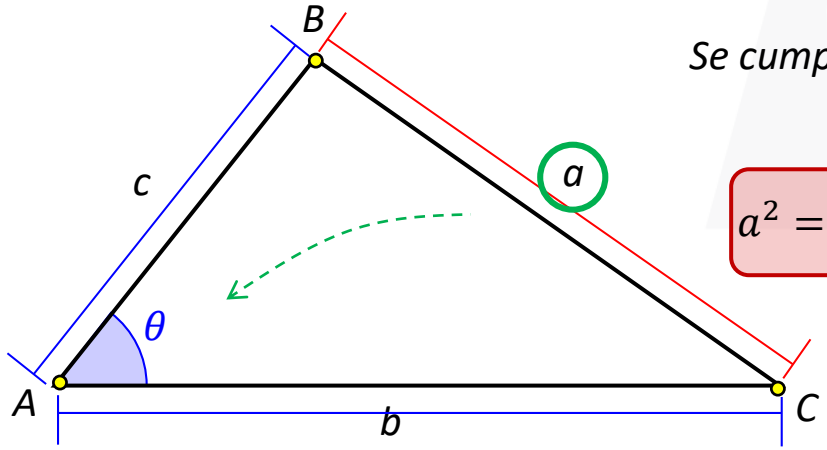
$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2$$

TEOREMA



$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

TEOREMA DE COSENOS

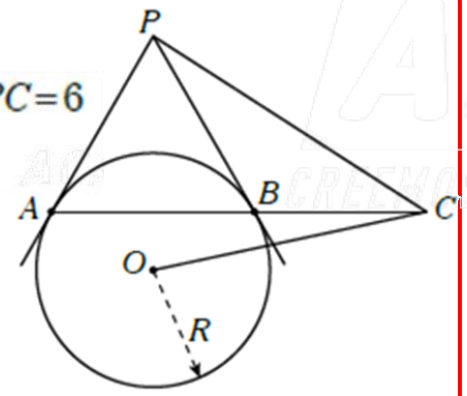


Se cumple:

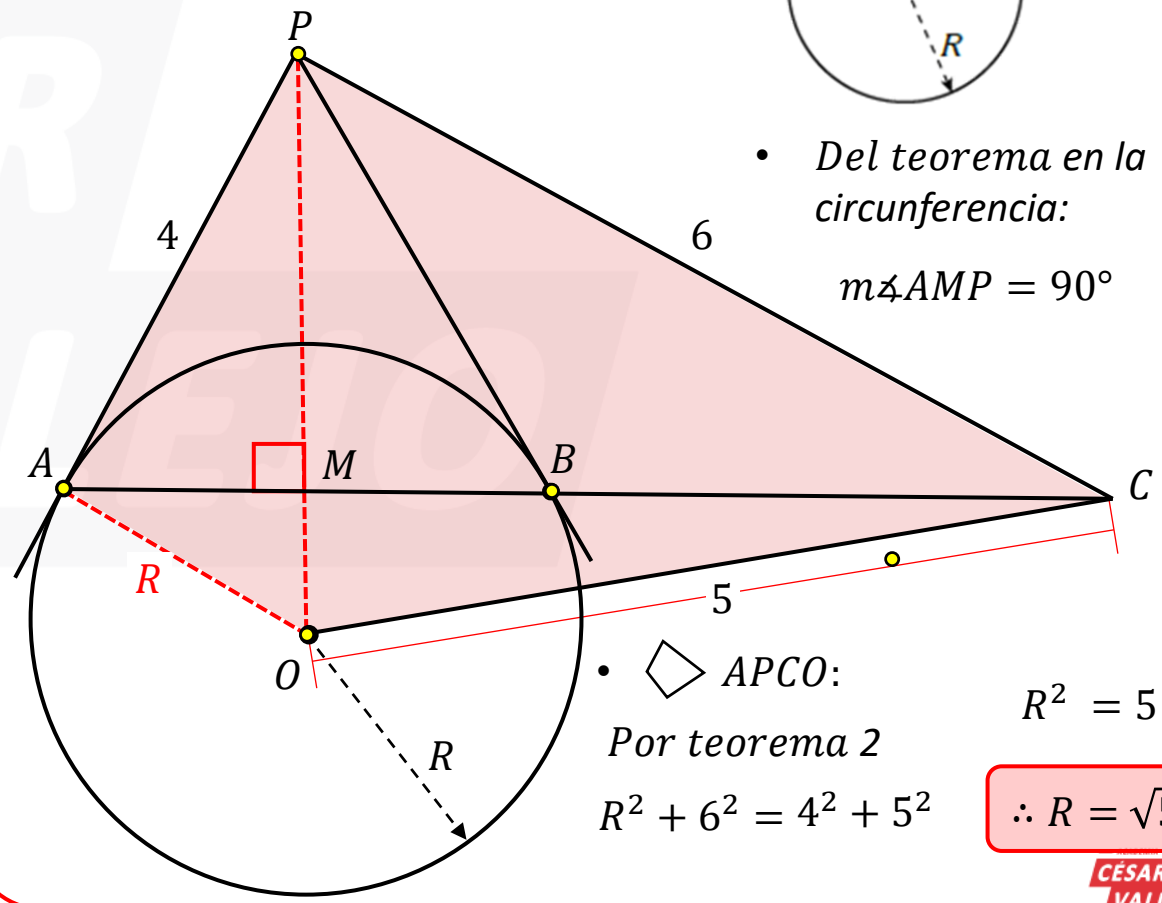
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos\theta$$

APLICACIÓN

Si A y B son puntos de tangencia, $AP=4$, $PC=6$ y $OC=5$; halle R.



RESOLUCIÓN Nos piden R



- *Del teorema en la circunferencia:*

$$m\measuredangle AMP = 90°$$

- $\square APCO$:

Por teorema 2

$$R^2 + 6^2 = 4^2 + 5^2$$

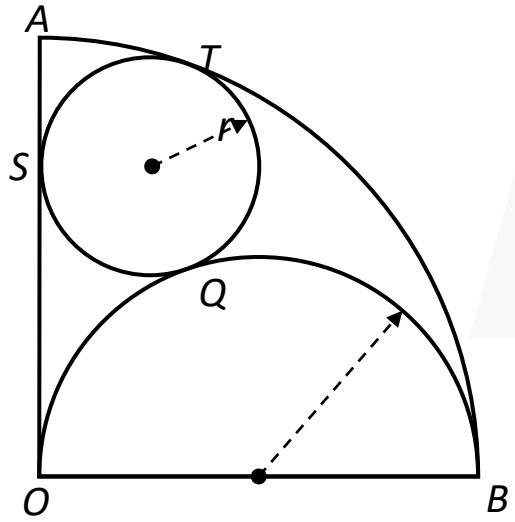
$$R^2 = 5$$

$$\therefore R = \sqrt{5}$$

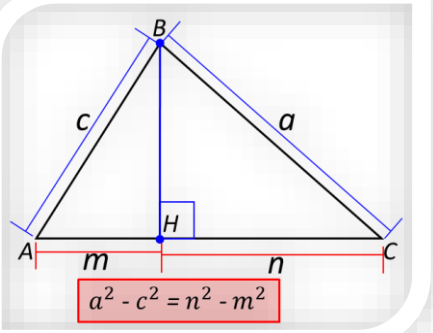
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

APLICACIÓN

Del gráfico el radio del cuadrante AOB es 4, calcule r. (T, Q y S son puntos de tangencia)

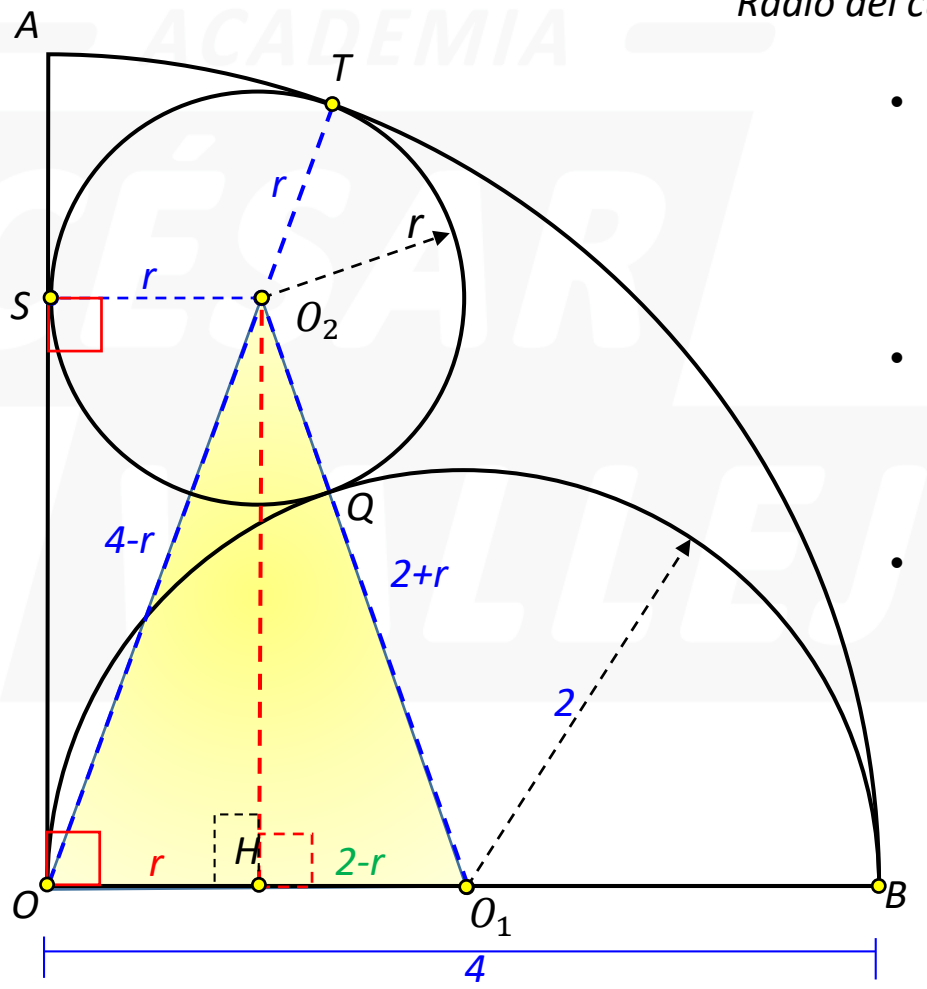


TEOREMA



RESOLUCIÓN: *Nos piden r*

Dato:
Radio del cuadrante AOB es 4, entonces $O_1B=2$

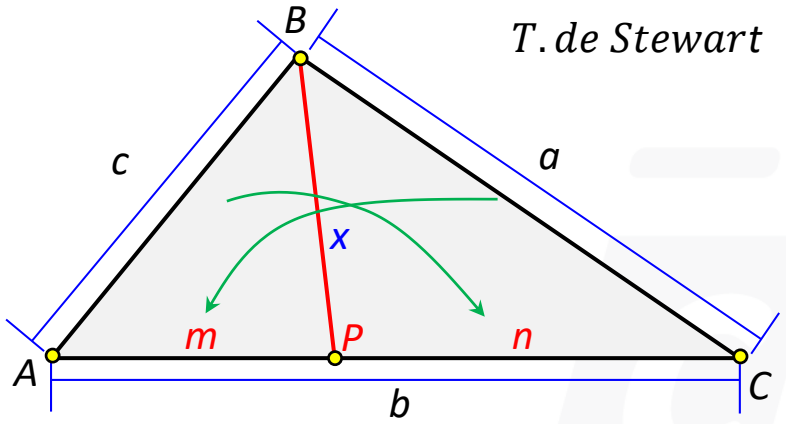


- *De las circunferencias tangentes exteriores e interiores, consideremos la colinealidad de los centros y puntos de tangencia:*
  $O_1O_2=2+r$ $OO_2=4-r$
- *Trazamos $\overline{O_2S}$ y $\overline{O_2H} \perp \overline{OB}$:*
  $O_2S=OH=r$
  $HO_1=2-r$
- *En el ΔOO_2O_1, por teorema de proyecciones:*
  $(4-r)^2 - (2+r)^2 = (r)^2 - (2-r)^2$

$\therefore r = 1$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

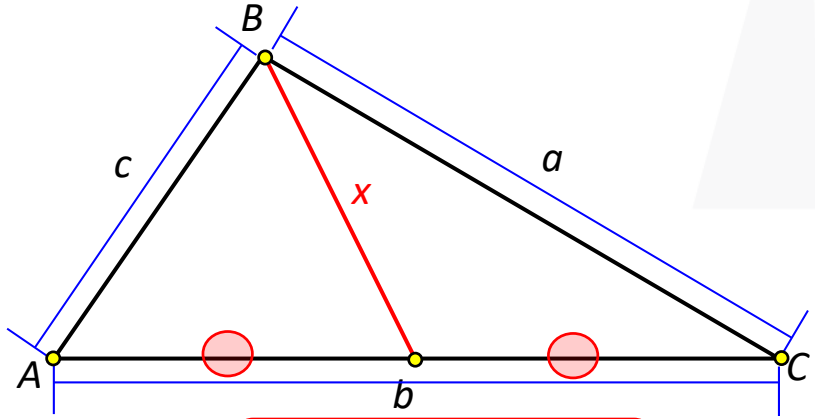
CÁLCULO DE LA CEVIANA



T. de Stewart

$$a^2(m) + c^2(n) = x^2(b) + bmn$$

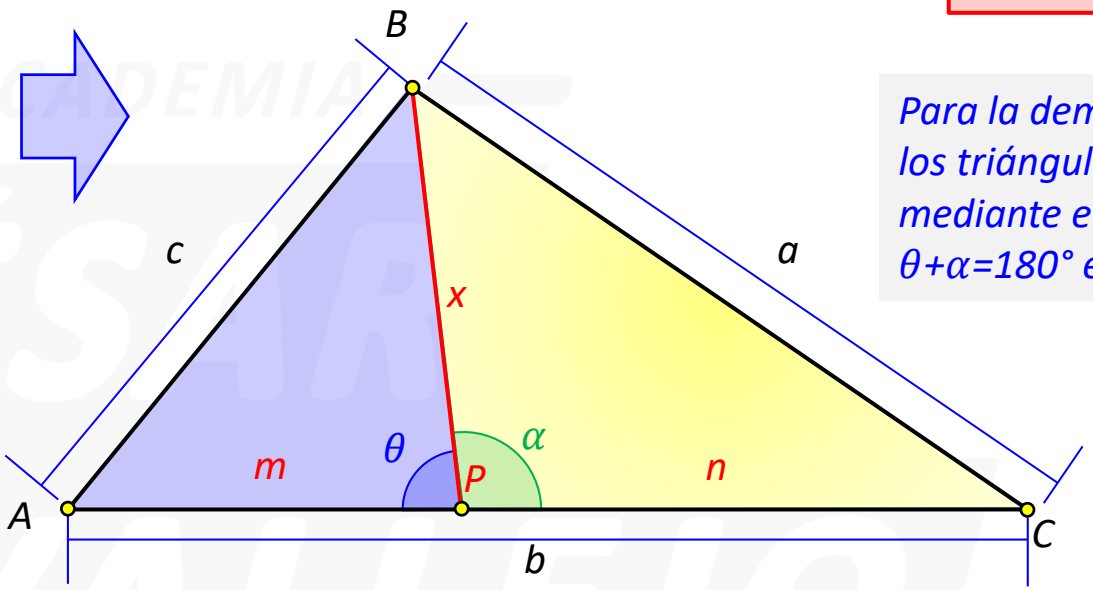
CÁLCULO DE LA MEDIANA



se cumple: $a^2 + b^2 = 2x^2 + \frac{c^2}{2}$

DEMOSTRACIÓN:

Demostrar que : $(a)^2m + (c)^2n = (x)^2b + bmn$



Para la demostración analizaremos a los triángulos parciales APB y BPC mediante el teorema de coseno. Si θ+α=180° entonces $Cos\theta = -Cos\alpha$

- *En el ΔAPB teorema de coseno:*

  $c^2 = x^2 + m^2 - 2xm.Cos\theta$

  $c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn.Cos\theta$ ...(I) (x n)

- *En el ΔBPC teorema de coseno:*

  $a^2 = x^2 + n^2 - 2xn.Cos\alpha$

  $a^2m = x^2m + n^2m - 2xnm.Cos\alpha$ ...(II) (x m)

  $-Cos\theta$

  $+2xmn.Cos\theta$

- *Sumamos (I) y (II):*

  $(a)^2m+(c)^2n=x^2n+x^2m+m^2n+n^2m$

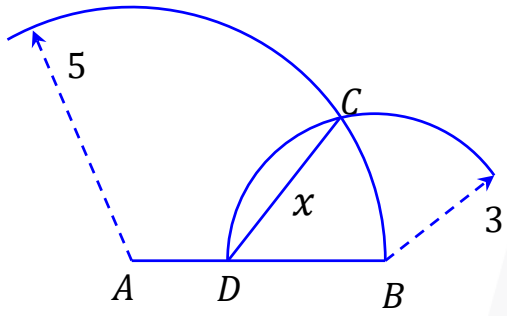
  $(a)^2m+(c)^2n=x^2\underbrace{(m+n)}_{b}+\underbrace{(m+n)}_{b}m.n$

$$\therefore (a)^2m + (c)^2n = (x)^2b + bmn$$

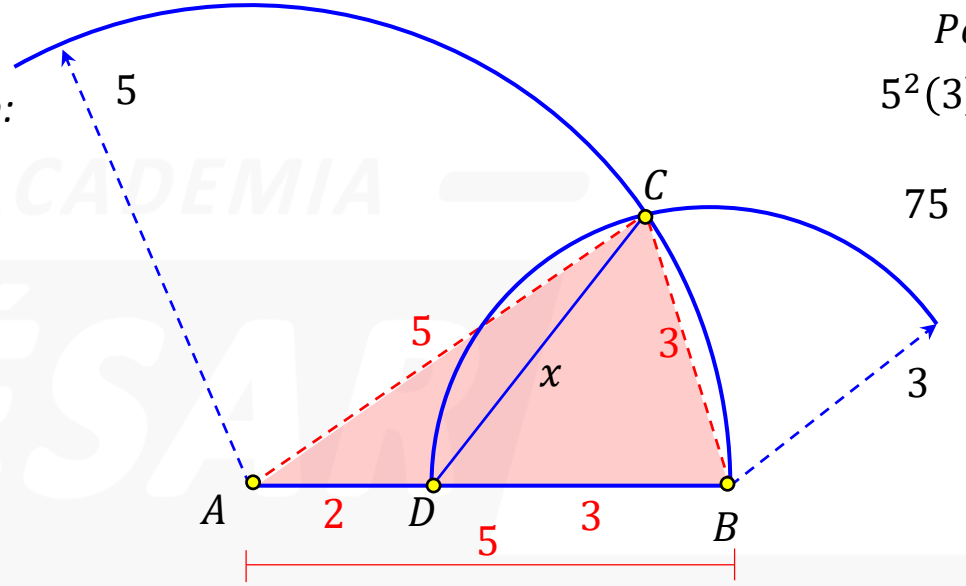
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

APLICACIÓN

Del gráfico, Calcule x.



Resolución:



Por Teorema de Stewart

$$5^2(3) + 3^2(2) = x^2(5) + (2)(3)(5)$$

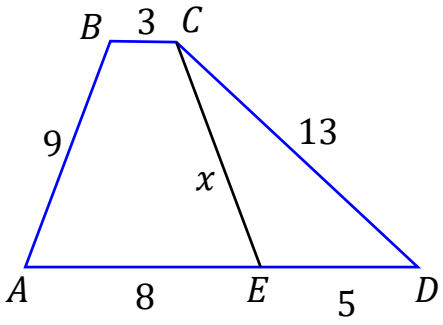
$$75 + 18 = x^2(5) + 30$$

$$93 = x^2(5) + 30$$

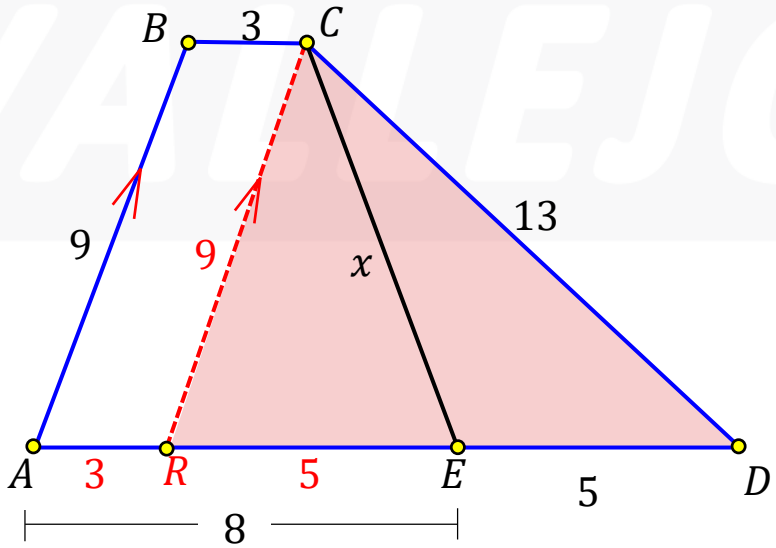
$$63 = x^2(5)$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{63}{5}}$$

Del gráfico, si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Calcule x.



Resolución:



ΔRCD: Por Teorema de la Mediana

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{10^2}{2}$$

$$81 + 169 = 2x^2 + 50$$

$$250 = 2x^2 + 50$$

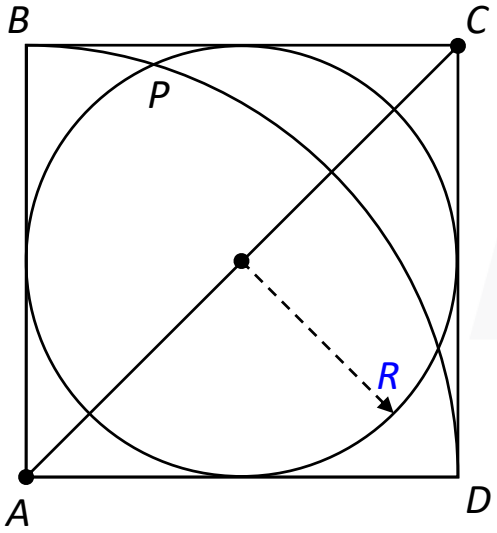
$$200 = 2x^2$$

$$\therefore x = 10$$

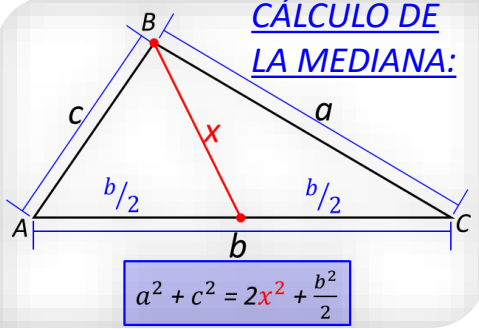
RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

APLICACIÓN

Del gráfico la circunferencia esta inscrita en el cuadrado ABCD, si R=2. calcule PC

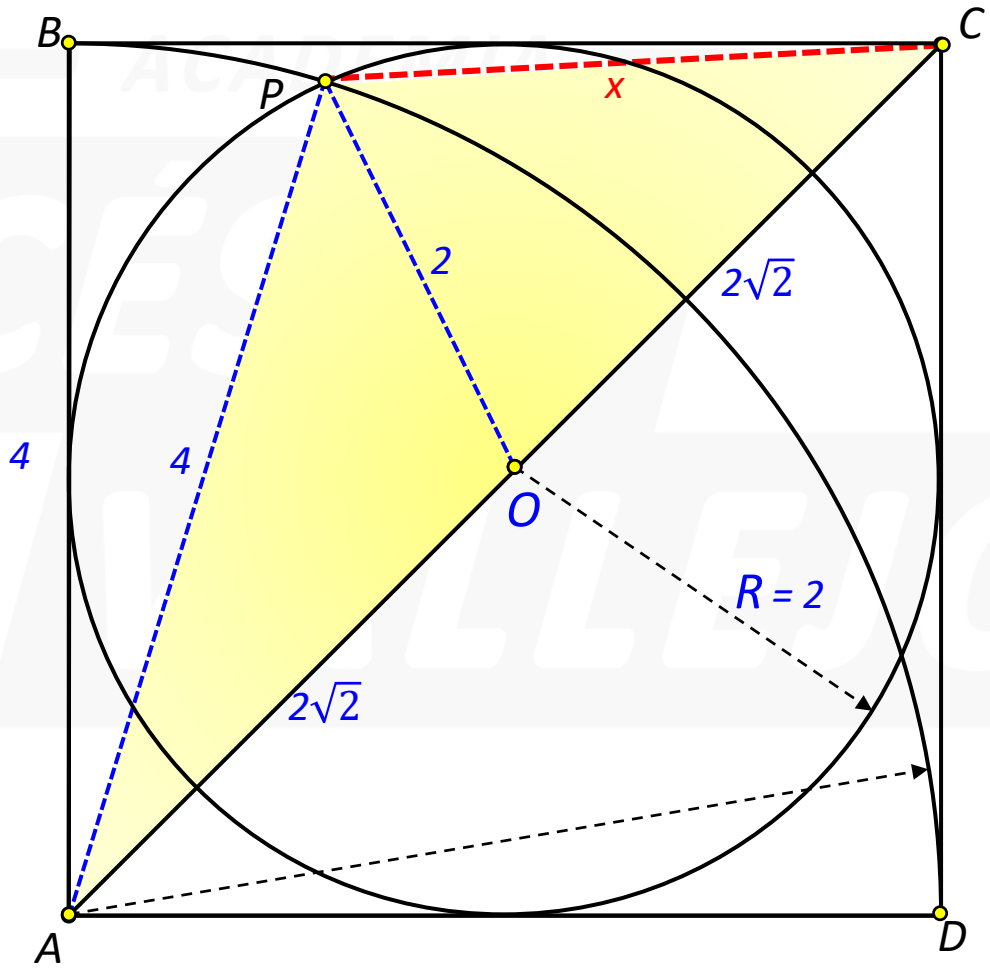


CÁLCULO DE LA MEDIANA:



$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}$$

RESOLUCIÓN: *Nos piden PC = x*



Dato: $R = 2$

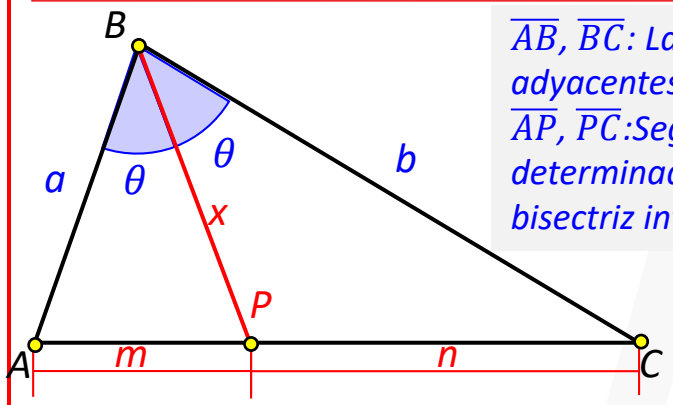
- *Como la circunferencia esta inscrita al cuadrado ABCD:*
  $AB=AD=4$
  $OP=2$
- *Si O es centro del cuadrado:*
  $AO=OC=2\sqrt{2}$
- *Del cuadrante BAD:*
  $AP=4$
- *En el ΔAPC, por cálculo de la mediana:*

$$x^2 + 4^2 = 2(2)^2 + \frac{(4\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

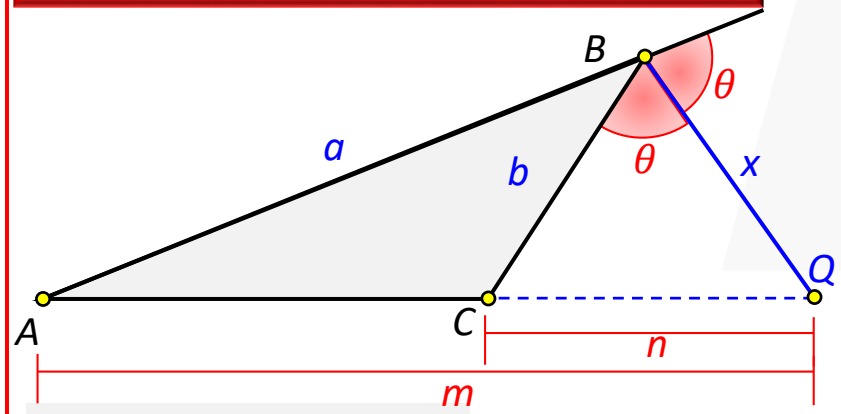
CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR



$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AP}$, $\overline{PC}$:Segmentos determinados por la bisectriz interior

$$x^2 = (a)(b) - (m)(n)$$

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

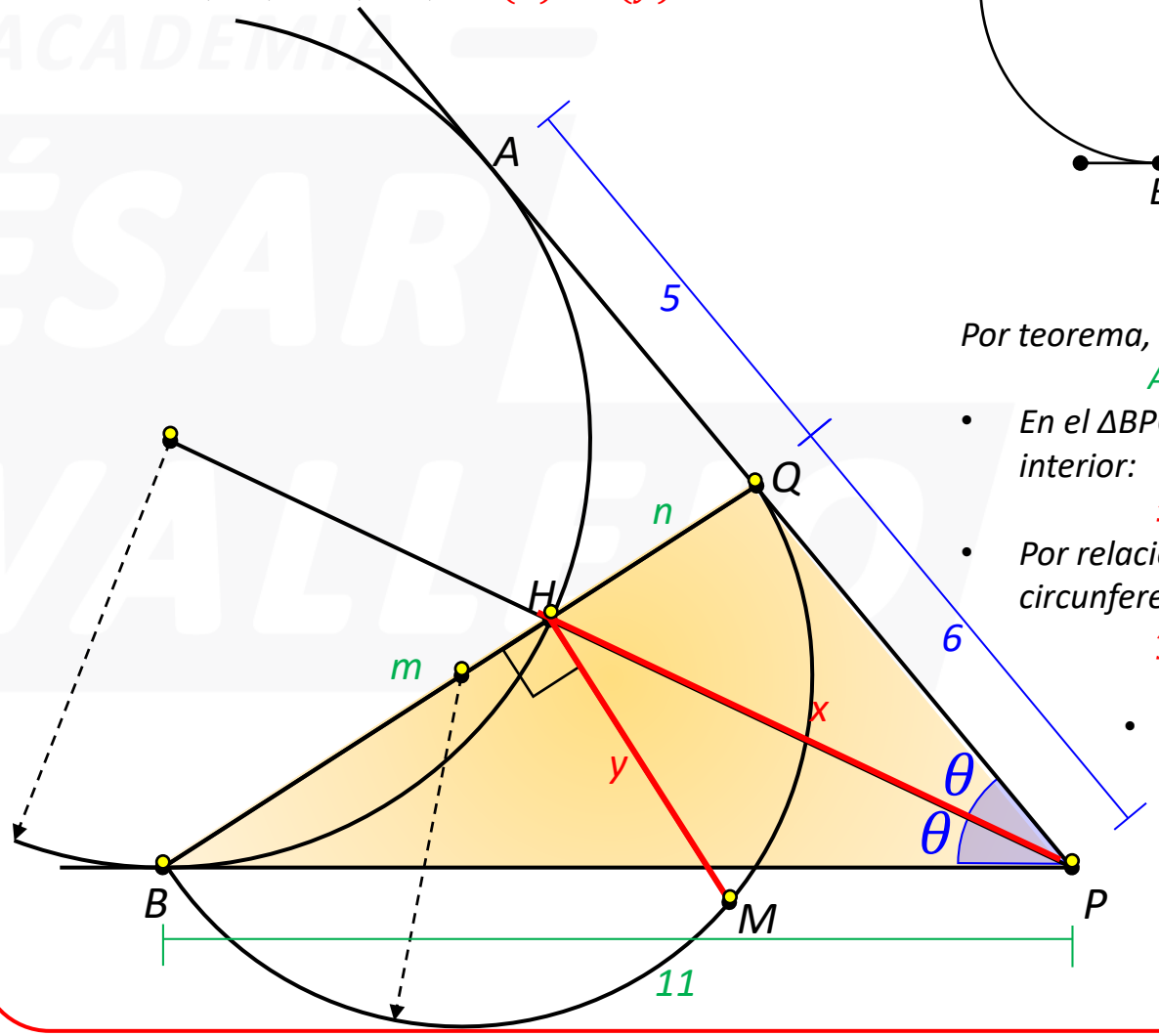


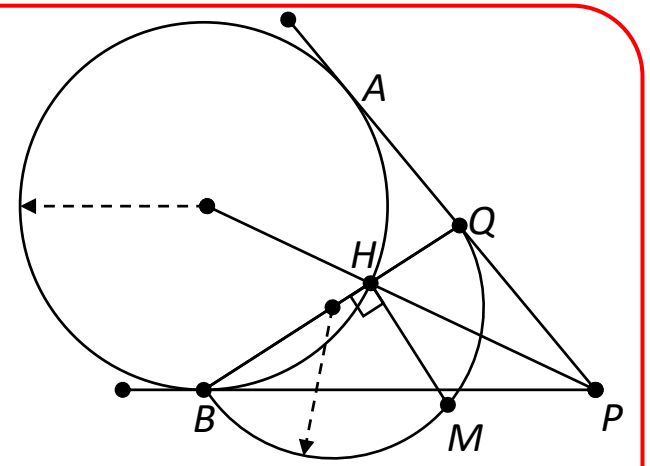
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$: Lados adyacentes
$\overline{AQ}$, $\overline{CQ}$: Segmentos determinados por la bisectriz exterior

$$x^2 = (m)(n) - (a)(b)$$

Del gráfico A y B son puntos de tangencia, si PQ=6 y AQ=5. calcule $(PH)^2 + (MH)^2$

Nos piden $(PH)^2 + (MH)^2 = (x)^2 + (y)^2$





Por teorema, $\overline{PH}$ es bisectriz.

AP=PB=11

- En el ΔBPQ, por cálculo de la bisectriz interior:

$$x^2 = (6)(11) - (m)(n)\ldots(I)$$

- Por relaciones métricas en la semi circunferencia:

$$y^2 = (m)(n)\ldots (II)$$

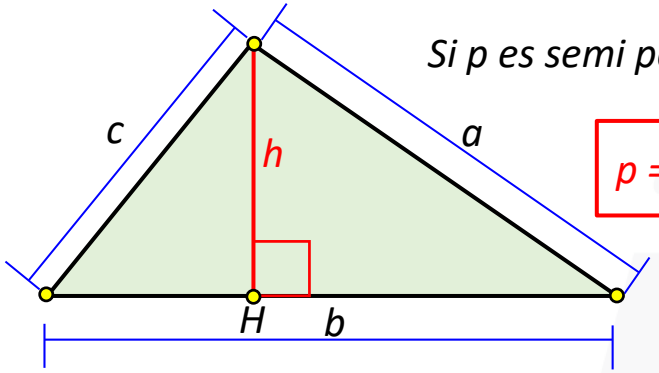
- Reemplazando (II) en (I):

$$x^2 = 66 - y^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 66$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

CÁLCULO DE LA ALTURA



Si p es semi perímetro

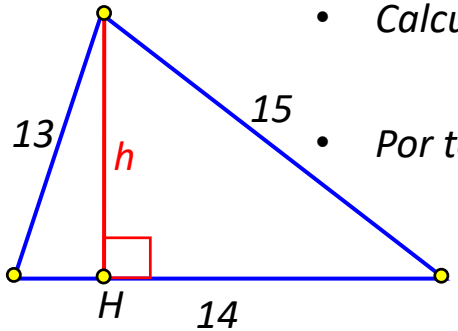
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

se cumple:

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

APLICACIÓN

Calcule h.



- *Calculamos el semi perímetro:*

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

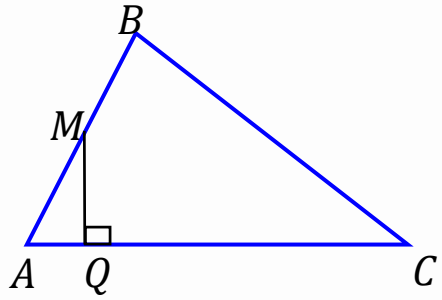
- *Por teorema de Herón:*

$$h = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)}$$

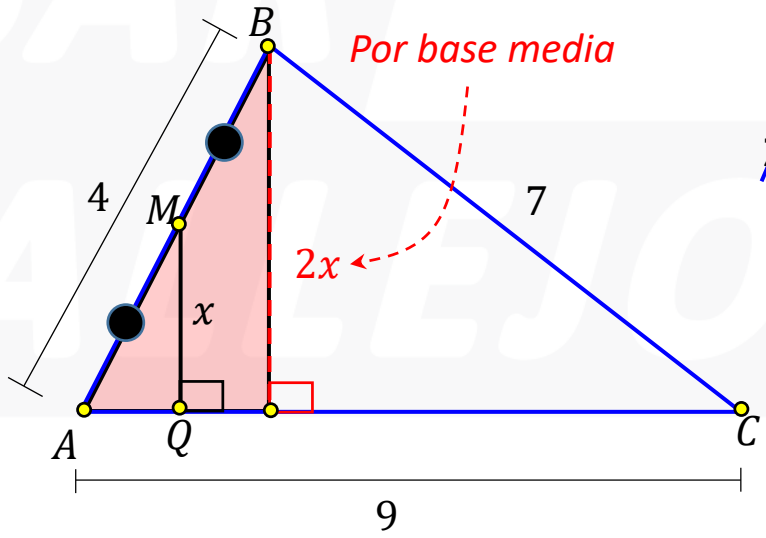
$$h = \frac{2}{14}\sqrt{(21)(6)(7)(8)}$$

$$\therefore h = 12$$

En la figura, AB=4cm, BC=7cm y AC=9cm, AM=MB. Halle MQ.



Resolución:



$$p = \frac{4+9+7}{2} = 10$$

Piden x

Aplicaremos el T. de Herón:

$$2x = \frac{2}{9}\sqrt{10\,(10-9)(10-4)(10-7)}$$

$$x = \frac{\sqrt{10(1)(6)(3)}}{9}$$

$$x = \frac{6\sqrt{5}}{9}$$

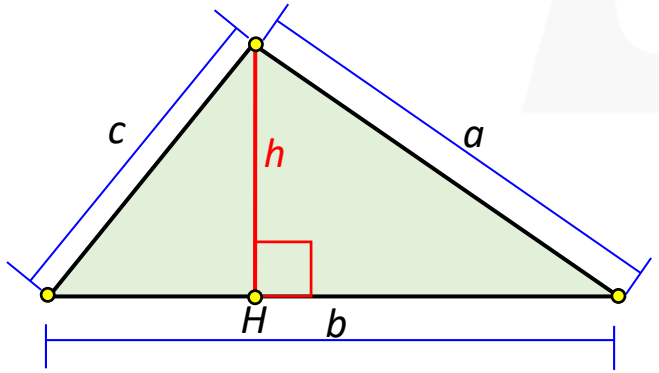
$$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

APLICACIÓN

En un trapecio escaleno sus diagonales miden 10 y 17 y su base media 10,5. calcule la altura de dicho trapecio.

TEOREMA



Si p es semi perímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$

se cumple:

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

RESOLUCIÓN:

Nos piden altura del trapecio: h

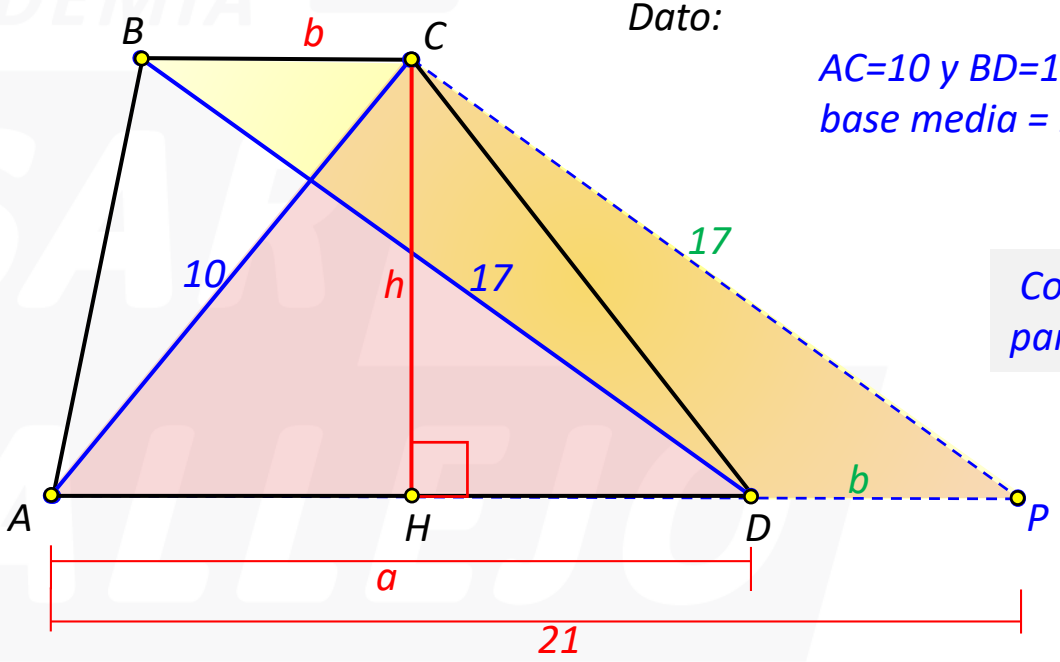
Dato:

$AC=10$ y $BD=17$

base media = 10,5 $= \frac{a+b}{2}$

$a + b = 21$

Construimos el paralelogramo DBCP.



- *Del paralelogramo DBCP:*

  $CP=17$ $PD=b$

  $AP= a + b = 21$

- *En el ΔACP, por teorema de Heron:*

  $p= \frac{10+17+21}{2} = 24$

- *Entonces:*

$$h = \frac{2}{21}\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}$$

$$h = \frac{2}{21}\sqrt{(24)(3)(7)(14)}$$

$\therefore h = 8$

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe